

中国科学院数学与系统科学研究院
2005 年博士研究生招生试题

考试科目：运筹学基础（3 小时完成，满分 100 分）

（一）【17 分】现需要长度为 95 公分的钢管 1000 根、80 公分的 2000 根，仓库中的原

材一根长 500 公分。问最少要用多少根原材？

（1）建立这一问题的线性规划模型，并用单纯型算法求出解（需写出过程）。

（2）若第一小题做不出来，请用单纯型算法解下面的问题（需写出过程）：

$$\begin{aligned} \text{Max } & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 18 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

（二）【17 分】对无约束二次规划问题：

$$\begin{aligned} \text{Max } Q(x) &= \frac{1}{2}x^T Gx + g^T x \\ x &\in R^n \end{aligned}$$

此处， G 为 n 阶对称矩阵， x, g 为 n 维向量。对以下情况讨论解的存在性：

- （1） G 为正定矩阵；
- （2） G 为半正定矩阵（非正定）；
- （3） G 为任意对称矩阵（非半正定）

（三）【17 分】任意给定欧式平面上的一个点集 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ， V 的一个生成

树是由以 V 中两点为端点的若干直线段组成的连通图，其权定义为所有线段长度的

和。证明： V 的最小权生成树的任意两条边都不相交。

（四）【17 分】小王和小李邀请了 10 位各自的朋友参加他俩的婚礼。大家见面后，

小王和小李问每位来宾他（或她）认识其他 9 位来宾人中的几位。结果每一个人认识的来宾数都不相同。问这可能吗？请写出理由。

(五) 【16 分】若 \bar{X} 是原问题

$$\max z = CZ; AX \leq b; X \geq 0$$

的可行解, \bar{Y} 是其对偶问题的可行解, 则有

$$C\bar{X} \leq \bar{Y}b.$$

(六) 【16 分】设 $f_\nu(x)$, $\nu \in I$, 是一族定义在凸集 $\Gamma \subseteq E^n$ 上的凸函数 (可以是有限个, 也可以是无限个)。

(i). 证明由

$$f(x) = \sup_{\nu \in I} f_\nu(x)$$

所定义的函数也是 Γ 上的凸函数。

(ii). 问 $g(x) = \inf_{\nu \in I} f_\nu(x)$ 是否也是 Γ 上的凸函数, 若是给出证明, 若不是给出反例。