中国科学院数学与系统科学研究院
2007 年博士研究生招生试题

（3 小时完成，满分 100 分）

考试科目： 非线性规划　　　　**导师姓名：** 章祥荪

1. （1）完成以下的各项定义: R^n 中的一个非空集合 S

   (a) 称为凸的（convex），当 $x^1, x^2 \in S$, __________时，有 $a_1x^1 + a_2x^2 \in S$。

   (b) 称为仿射的（affine），当 $x^1, x^2 \in S$, __________时，有 $a_1x^1 + a_2x^2 \in S$

   (c) 称为一个线性子空间（linear subspace），当 $x^1, x^2 \in S$, __________时，有 $a_1x^1 + a_2x^2 \in S$

   (d) 称为一个锥（cone），即指 $x \in S$ 时, 有__________

   (e) 称为一个点锥（point cone），即指__________

   (f) 称为一个多胞形（polyhedron），是指__________

   (g) 称为一个多面体（polytope），是指__________

（2）在下表中打钩，以示以上概念的从属关系。例如，表中已示，多面体是凸集。

	凸集	仿射集	线性子空间	锥	点锥	多胞形	多面体
凸集	$\surd$						
仿射集		$\surd$					
线性子空间			$\surd$				
锥				$\surd$			
点锥					$\surd$		
多胞形						$\surd$	
多面体	$\surd$						$\surd$

2. 一个一般的非线性规划问题可以写成以下形式：

$$\begin{array}{rl} \min_x & f(x) \\ \text{subject to} & g_i(x) \geq 0,\ i = 1, \cdots, m \\ & h_j(x) = 0,\ j = 1, \cdots, p \end{array}$$

在函数 $f(x), g_i(x), h_j(x)$ 上一般会加上一些假设，如以下所列：

(1) 连续性 (2) 连续可微 (3) 二次连续可微 (4) 凸性

简单叙述这些假设对问题的解的性质和算法所起的作用。（提示：解的存在性、最优条件的叙述、算法的收敛速率，以及其它的有关性质。）

3. (1). 已知定理：设 A 为 $n \times n$ 对称正定矩阵，其特征值为 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \cdots \leq \lambda_n$. 设 a 为 R^n 中的任意向量。记矩阵 $A + aa^T$ 的特征值为 $\mu_1 \leq \mu_2 \cdots \leq \mu_n$。我们有

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \cdots \leq \lambda_n \leq \mu_n$$

（定理完）

现考虑一个单个等式约束的规划问题：

$$
\begin{array}{l}
\min_x \ f(x) \\
\text{subject to} \ \ h(x) = 0
\end{array}
$$

此处 $f(x)$ 和 $h(x)$ 为 $R^n \to R$ 的可微函数。一种解法是将此问题转化为一个无约束问题：

$$
\min_x \ f(x) + \frac{1}{2}\mu(h(x))^{\frac{1}{2}}
$$

这里 μ 是一个罚系数。用最速下降法来解这一无约束问题。当 f 是二次函数、h 是线性函数时，即

$$
\begin{array}{l}
\min \ \frac{1}{2}x^TQx - b^Tx \\
\text{subject to} \ \ c^Tx = 0
\end{array}
$$

此处 Q 为对称正定。利用所给定理讨论用最速下降法来解这一无约束问题时的计算性能。

(2). 证明（1）中的定理。

提示：利用下面的 Rayleigh-Ritz 定理和 Courant-Fischer 定理来证明。

Rayleigh-Ritz 定理: 设 A 为 $n \times n$ Hermite 阵，其特征值为 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$，则有

$$
\lambda_1 = \max_{x \neq 0} \frac{x^TAx}{x^Tx}, \quad \lambda_n = \min_{x \neq 0} \frac{x^TAx}{x^Tx}
$$

Courant-Fischer 定理: 设 A 为 $n \times n$ Hermite 阵，其特征值为 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$，相应的标准正交化特征向量为 $\phi_1, \cdots, \phi_n$。设 B 为 $n \times k$ 矩阵, $k = 1, \cdots, n-2$, 则有

$$(i).\ \min_{B} \max_{x \neq 0, B^T x = 0} \frac{x^T A x}{x^T x} = \lambda_{k+1}$$

且当 $B = (\phi_1, \cdots, \phi_k)$ 时上式达到 λ_{k+1}。

$$(ii).\ \max_{B} \min_{x \neq 0, B^T x = 0} \frac{x^T A x}{x^T x} = \lambda_{n-k}$$

且当 $B = (\phi_{n-k+1}, \cdots, \phi_n)$ 时上式达到 λ_{n-k}。

（共三大题、五小题）