中国科学院数学与系统科学研究院
2006 年博士研究生招生试题

（3 小时完成，满分 100 分）

考试科目： 非线性规划　　　　**导师姓名：** 章祥荪

1. 以下两个数列的极限均是 1:

$$s_i: \ 1+0.1,\ 1+0.01,\ 1+0.001,\ 1+0.0001,\cdots, \tag{1}$$

$$p_i: \ 1+0.1,\ 1+0.01,\ 1+0.0001,\ 1+0.00000001,\cdots \tag{2}$$

   (a) 分别指出这些数列的收敛速率。

   (b) 按上面的例子构造出一个收敛到 1 的超线性收敛的数值例子。

   (c) 你知道在非线性规划算法中分别有哪些大类的算法有这些收敛速率。

2. 设 Ω 是 R^n 中的一个闭凸集，$\boldsymbol{x}$ 是 R^n 中的任意一点。定义 $P_\Omega(\boldsymbol{x})\in\Omega$ 为由 $\boldsymbol{x}$ 到集 Ω 的投影，即

$$\|\boldsymbol{x}-P_\Omega(\boldsymbol{x})\| = \min_{\boldsymbol{y}\in\Omega}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\| \tag{3}$$

   证明满足：

   (a) 对任意 $\boldsymbol{y}\in\Omega$,

$$(P_\Omega(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x})^T(P_\Omega(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y})\le 0 \tag{4}$$

(b) 利用上面的结果，证明对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in R^n$

$$\|P_\Omega(\boldsymbol{x}) - P_\Omega(\boldsymbol{z})\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\| \tag{5}$$

（提示：若第一小题不会证明，仍可利用 (4) 式来证明第二小题）

3. 设 S 和 T 为 R^n 中的子集，$S \bigcap T$ 为连通的闭集，$f(\boldsymbol{x})$ 为 R^n 上的连续函数。问题

$$\begin{array}{rl} \min & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in S \bigcap T \end{array} \tag{6}$$

有总体最优解。假定对每一总体最优解 $\boldsymbol{x}^*$，在它的任意邻域 $N(\boldsymbol{x}^*)$ 内，总有一点 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 $S \bigcap T$ 的内点。用惩罚 - 障碍混合方法来解这一问题，即定义无约束问题

$$W(\boldsymbol{x}, \mu) = f(\boldsymbol{x}) + \mu P(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{\mu} B(\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

其中 $P(\boldsymbol{x})$ 是关于 S 的连续惩罚函数、$B(\boldsymbol{x})$ 是关于 T 的连续障碍函数 $(P(\boldsymbol{x}) \geq 0, B(\boldsymbol{x}) \geq 0)$。

(a) 写出利用 (7) 求解 (6) 的算法模式。

(b) 设 $\boldsymbol{x}^*$ 是原问题 (6) 的一个最优解，对逐次产生的 $\mu_k, \boldsymbol{x}^k$（此处 $\boldsymbol{x}^k$ 是解 $\mu = \mu_k$ 时的 (7) 的总体最小解），证明有

$$\lim_k W(\boldsymbol{x}^k, \mu_k) \geq f(\boldsymbol{x}^*) \tag{8}$$

以及

$$\lim_k W(\boldsymbol{x}^k, \mu_k) \leq f(\boldsymbol{x}^*) \tag{9}$$

(c) 再证

$$\lim_k \mu_k P(\boldsymbol{x}^k) = 0 \text{ and } \lim_k \frac{1}{\mu_k} B(\boldsymbol{x}^k) = 0 \tag{10}$$

(d) 最后证明当 $\boldsymbol{x}^k \to \hat{\boldsymbol{x}}$ 时，$\hat{\boldsymbol{x}}$ 为原问题的一个最优解。

（共三题）