中国科学院数学与系统科学研究院
2004 年博士研究生招生试题

（3 小时完成，满分 100 分）

考试科目： 非线性规划　　　　　**导师姓名：** 章祥荪

1. 设 S^1, S^2, S^3 是 R^n 中的三个凸集，两两之间的交为空集.

（1） 证明存在两个非零向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$，使

$$\boldsymbol{a}_1^T \boldsymbol{x}^1 \ + \ \boldsymbol{a}_2^T \boldsymbol{x}^2 \geq 0, \quad \text{for all } \boldsymbol{x}_1 \in S^1 \text{ and all } \boldsymbol{x}_2 \in S^2$$

（2） 存在三个非零向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$，使

$$\boldsymbol{a}_1^T \boldsymbol{x}^1 \ + \ \boldsymbol{a}_2^T \boldsymbol{x}^2 \ + \ \boldsymbol{a}_3^T \boldsymbol{x}^3 \geq 0,$$

对所有 $\boldsymbol{x}_1 \in S^1$, 所有 $\boldsymbol{x}_2 \in S^2$ 和所有 $\boldsymbol{x}_3 \in S^3$ 均成立。

2. 设 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)^T$ 为 R^n 中一固定点，

$$\Omega(\boldsymbol{x}) \ = \ \{\boldsymbol{x} : \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$$

是 R^n 中的一个子集，其中 A 为 $m \times n (n > m)$ 矩阵, 其行为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m \in R^n$, $\boldsymbol{b} \in R^m$。

（1） 写出一个非线性规划问题，求解在 $\Omega(\boldsymbol{x})$ 上与点 $\boldsymbol{p}$ 距离最近的点。

（2） 设 A 满秩，用投影公式直接求出解的表达。

3. 设 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d} \in R^n$, 由

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}) \approx f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{d} + \frac{1}{2}\boldsymbol{d}^T \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{d}, \tag{1}$$

则当 $\boldsymbol{d}$ 满足

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{d} = -\nabla f(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

时 $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}) - f(\boldsymbol{x})$ 可能达到最小，故称 (2) 为牛顿方程，满足 (2) 的 $\boldsymbol{d}$ 为牛顿方向。现设平方和问题

$$\min F(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} f_i(\boldsymbol{x})^2 = \frac{1}{2}\|f(\boldsymbol{x})\|^2 \tag{3}$$

的最优值为零。

（a）说明 $\boldsymbol{x}$ 充分接近最优解时，问题 (3) 的牛顿方向可由线性平方和问题

$$\min_{\boldsymbol{d} \in R^n} \frac{1}{2}\|J(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d} + f(\boldsymbol{x})\|^2 \tag{4}$$

来定义，其中 $J(\boldsymbol{x})$ 为 $f(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}))^T$ 的 Jacobi 矩阵，即 $J(\boldsymbol{x}) = (\nabla f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, \nabla f_m(\boldsymbol{x}))^T$。

（b）讨论 $J(\boldsymbol{x})$ 的条件数对牛顿方程计算的影响。

（共三题）