第 17卷 第 5期 运 筹 与 管 理 Vol 17, No. 5
2008年 10月 OPERATIONS RESEARCH AND MANAGEMENT SCIENCE Oct 2008

最优公交线路选择问题的数学模型及算法

周文峰[1], 李珍萍[2], 刘洪伟[2], 王吉光[3]

(1. 北京物资学院 教务处,北京 101149; 2. 北京物资学院 信息学院,北京 101149; 3. 中国科学院 数学与系统科学研究院,北京 100080)

摘 要:公交线路选择问题是城市公共交通信息查询的重要内容,本文建立了满足不同公交线路查询者需求的最优线路选择模型并给出了相应的算法。首先通过引入各条公交线路直达最短距离矩阵构造了公交网络直达关系图(直达矩阵),在直达关系图(直达矩阵)上,利用修改了的最短路算法,即可求得最优换乘路线。根据出行者的不同需求,通过在直达关系图上定义不同的权系数,可以分别求得换乘次数最少的公交出行线路、经过站点最少的公交出行线路;通过修改最短路算法,可以求得出行耗时最少的线路及出行费用最低的线路,另外,本模型还可以综合考虑出行者的需求情况,求得出行者满意度最大的出行路线。

关键词:运筹学;最优路线;直达矩阵;换乘;最短路

中图分类号:O223 **文章标识码**:A **文章编号**:1007-3221(2008)05-0080-05

Mathematical Models and Algorithms of Optimal Public Transportation Line Choice Problem

ZHOU Wen-feng[1], LI Zhen-ping[2], LIU Hong-wei[2], WANG Ji-Guang[3]

(1. *Educational Administration Section, Beijing Wuzi University, Beijing* 101149, *China;* 2. *School of Information, Beijing Wuzi University, Beijing* 101149, *China;* 3. *Institute of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Science, Beijing* 100080, *China*)

Abstract: Public transportation line choice problem is the most important issue in query of public information. This paper gives the mathematical models and algorithms of optimal public transportation line choice according to the different request of the questers. First, the distance matrix of public transportation line is introduced, then the directed relation graph is constructed. In the directed relation graph, we can give the optimal line by revised shortest path algorithms. For different requests, we can find the public transportation line of least change, shortest path and so on by revising the weight coefficient of edges in the directed relation graph. By revisinge the algorithm of shortest path, we can find the optimal lines of the shortest time or the lowest fee. Furthermore, the model can be used to find the most satisfaction line of different travelers.

Key words: operational research; optimal line; directed matrix; transfer; the shortest path

0 引言

随着城市公交系统的快速发展,各个大城市普遍建立了四通八达的公交网络,例如北京市目前公交线

收稿日期:2007-11-03

基金项目:北京市属市管高等学校人才强教项目(2007-2009)和北京物资学院科研基地联合资助。

作者简介:周文峰(1966-),男,经济师,学士(在读硕士研究生),主要研究方向:供应链管理,计算机算法;李珍萍(1966-),女,教授,博士,主要研究方向:运筹学理论及应用,生物信息学;刘洪伟(1978-),男,讲师,博士,主要研究方向:运筹学理论及应用;王吉光(1982-),男,博士研究生,主要研究方向:运筹学,生物信息学。

路已达 800条以上,公交线路的增加,一方面使得公众的出行更加通畅、便利,另一方面也使得乘坐公交工具出行的人们,面临多条线路的选择问题。尤其是 2008年奥运会期间,会有大量的国内外观众涌入北京,这些人不熟悉北京的公交线路,所以他们迫切需要一种方便快捷的公交线路查询系统,以便能及时查询需要乘坐的公交车次,换乘站位置等信息。

由于不同的出行者有不同的需求,如有的乘客希望换乘次数最少,有的希望经过的路程最短,有的希望所花费的时间最短,还有的希望所花费的费用最低等,因此如何在现有的公共交通条件下,针对不同乘客的需求,提出一种合理的公交线路查询模型和算法是建立公交信息查询系统的关键。

目前应用比较广泛的公交线路查询方法主要是利用启发式算法直接从经过出发站点和终到站点的线路中搜索[1],寻找满足条件的换乘方案。本文主要考虑公交出行者的换乘次数、出行时间、出行费用等因素,建立最优公交线路查询问题的数学模型,并设计算法寻找最优公交出行路线。

1　最优公交出行线路选择模型及算法

问题的描述:在给定有若干条公交线路的公交网络图中,求任意两个站点之间的最佳出行路线。根据乘客的要求不同,最佳出行路线可以分别表示为最短距离路线、最少换乘次数路线、最短时间路线、最少费用路线以及最大满意度路线等,下面分别讨论。

1.1　最短距离公交出行线路选择模型及算法

第 1步　建立每条线路的直达距离矩阵

首先把所有的公交站点作为顶点,对每条公交线路,按照公交车的运行方向 (双向、上行或下行),在相邻两个站点之间连边或弧 (如果是上下行站点完全相同,则在相邻两个站点之间连边,否则在相邻站点之间连弧且弧的方向与公交车运行方向一致),边或弧的权均为 1,得到该公交线路邻接关系图,在该图上运用 Dijkstra算法,可以求出任意两点之间的最短路,根据最短路建立该线路对应的最短距离直达矩阵。

以下以一个简单的例子说明。

图 1是由 6个站点两条公交线路构成的公交网。对每一条线路建立一个直达关系矩阵。

(图 1一个简单的例子, a, b, c, d, e, f分别表示六个公交车站,实线表示 1号公交线路,虚线表示 2号公交线路,假定两条线路都是双向的且来回站点完全相同,因此使用无向图表示。为了方便,本文中把 a, b, c, d, e, f分别编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6。)

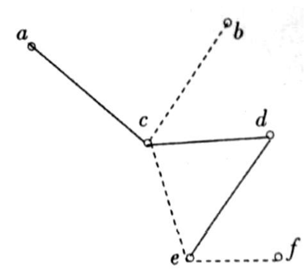

图 1

$$A_1=\begin{pmatrix}0&\infty&1&\infty&\infty&\infty\\ \infty&0&\infty&\infty&\infty&\infty\\ 1&\infty&0&1&\infty&\infty\\ \infty&\infty&1&0&1&\infty\\ \infty&\infty&\infty&1&0&\infty\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&0\end{pmatrix}\quad A_2=\begin{pmatrix}0&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty\\ \infty&0&1&\infty&\infty&\infty\\ \infty&1&0&\infty&1&\infty\\ \infty&\infty&\infty&0&\infty&\infty\\ \infty&\infty&1&\infty&0&1\\ \infty&\infty&\infty&\infty&1&0\end{pmatrix}$$

再利用 Dijkstra算法计算最短路,得到每条线路的直达距离矩阵。

1号线路和 2号线路的直达距离矩阵分别为 B_1, B_2,其中 B_1 (B_2)的每个元素表示乘 1号 (2号)线路的车从第 i站到第 j站走过的最短距离。

$$B_1=\begin{pmatrix}0&\infty&1&2&3&\infty\\ \infty&0&\infty&\infty&\infty&\infty\\ 1&\infty&0&1&2&\infty\\ 2&\infty&1&0&1&\infty\\ 3&\infty&2&1&0&\infty\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&0\end{pmatrix}\quad B_2=\begin{pmatrix}0&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty\\ \infty&0&1&\infty&2&3\\ \infty&1&0&\infty&1&2\\ \infty&\infty&\infty&0&\infty&\infty\\ \infty&2&1&\infty&0&1\\ \infty&3&2&\infty&1&0\end{pmatrix}$$

第 2步　构造公交系统总的直达距离矩阵

定义取小运算“∧”如下

$$a\wedge b=\min\{a, b\}$$

利用取小运算将所有线路对应的直达距离矩阵合成,得到一个总的直达距离矩阵。

$$B = B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1(1) & 2(1) & 3(1) & \infty \\ \infty & 0 & 1(2) & \infty & 2(2) & 3(2) \\ 1(1) & 1(2) & 0 & 1(1) & 1(2) & 2(2) \\ 2(1) & \infty & 1(1) & 0 & 1(1) & \infty \\ 3(1) & 2(2) & 1(2) & 1(1) & 0 & 1(2) \\ \infty & 3(2) & 2(2) & \infty & 1(2) & 0 \end{pmatrix}$$

其中括号里的数字表示线路的编号,如: $b_{14} = 2(1)$表示从站点 a到站点 d的直达最短距离是 2站,需要乘坐的是 1路车。

第 3步 对总的直达距离矩阵使用 Dijkstra算法,得到任意两点之间的最短距离矩阵 D及最优路线。本例中

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

根据最短距离矩阵即可确定经过站点最少的乘车路线,如本例中从 a到 f的最短距离是 3,即需要走过 3站路,乘车方案是先做 1站 1路车,然后在 c站换乘 2路车,坐 2站即可到达 f站。如果把各条线路对应的直达关系矩阵中的 1换成两站之间的实际距离,则用该方法可以得出任意两站之间的实际距离最短的乘车方案。

1.2 换乘次数最少的线路选择模型及算法

在影响乘客选择公交线路的诸多因素中,换乘次数是最重要的。如果要得到换乘次数最少的线路,我们只需要把 1.1中公交直达距离矩阵加以修改,即可用 Dijkstra算法得到最少换乘公交出行线路。

修改方法:将 1.1中矩阵 B的非零有限元素全部改为 1,即得到公交网络的直达关系矩阵,本例中的直达关系矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1(1) & 1(1) & 1(1) & \infty \\ \infty & 0 & 1(2) & \infty & 1(2) & 1(2) \\ 1(1) & 1(2) & 0 & 1(1) & 1(2) & 1(2) \\ 1(1) & \infty & 1(1) & 0 & 1(1) & \infty \\ 1(1) & 1(2) & 1(2) & 1(1) & 0 & 1(2) \\ \infty & 1(2) & 1(2) & \infty & 1(2) & 0 \end{pmatrix}$$

对该矩阵使用 Dijkstra算法,即可得到任意两站之间换乘公交车次数最少的乘车方案。本例中任意两站之间的乘坐车次最少的矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $c_{16} = 2$表示从 a到 f乘坐公交车的最少次数为 2次,换乘次数为 $2 - 1 = 1$次,换乘方案为:先从 a点坐 1路车到 c,再换乘 2路车坐 2站到 f点,或者先从 a点坐 1路车到 e,再换乘 2路车坐 1站到 f点。

1.3 总费用最少的线路选择模型及算法

对于把总费用最少作为选择出行路线依据的乘客,必须考虑各条公交线路的计价方式。目前虽然各路公交车的票价计价方式不同,但通常可分为单一票价和分段计价两种。不管哪种方式,票价都与路程直接相关。因此,我们可以根据各条公交线路的直达距离矩阵和公交线路的计价方式,直接利用票价与路程的关系,计算得到各条线路的直达票价矩阵。

假设本例中 1号线路为单一票价,票价为 1元, 2号线路为分段计价,不妨假设 2站以内为 1元,超过 2站为 2元。则根据直达距离矩阵 B_1、B_2 可以分别计算得到直达票价矩阵 P_1, P_2。

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 & 1 & 1 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & 0 & 1 & 1 & \infty \\ 1 & \infty & 1 & 0 & 1 & \infty \\ 1 & \infty & 1 & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 1 & \infty & 1 & 2 \\ \infty & 1 & 0 & \infty & 1 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 1 & \infty & 0 & 1 \\ \infty & 2 & 1 & \infty & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

再将直达票价矩阵利用取小运算合成,即可得到总的直达票价矩阵。

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1(1) & 1(1) & 1(1) & \infty \\ \infty & 0 & 1(2) & \infty & 1(2) & 2(2) \\ 1(1) & 1(2) & 0 & 1(1) & 1(2) & 1(2) \\ 1(1) & \infty & 1(1) & 0 & 1(1) & \infty \\ 1(1) & 1(2) & 1(2) & 1(1) & 0 & 1(2) \\ \infty & 2(2) & 1(2) & \infty & 1(2) & 0 \end{pmatrix}$$

对该直达票价矩阵利用 Dijkstra算法即可求出任意两点之间的总费用最少的乘车方案。本例中任意两站之间的最小费用矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $q_{15} = 1$ 表示 a 到 e 乘坐公交车的最少费用为 1元,乘车方案为直接乘 1号线路的公交车,不需换乘。

1.4　总时间最短的线路选择模型及算法

出行耗时指乘客在一次出行过程中所需要的总时间,其中包括在车上消耗的时间、在车外换乘以及等车的时间。由于在车上消耗的时间与公交车走行的距离有直接的关系,在车外消耗的时间则与换乘次数直接相关,因此,在求最优路线时,我们必须把两者结合考虑。

为了简化问题,我们假设同一条公交线路上公交车在相邻两站之间的运行时间(包括停站时间)相同,乘客在同一公交车站换乘的时间(包括等车时间)相同(换乘时间不同的情况可以类似处理)。为了求出总时间最短的出行路线,我们可以先将同一公交线路对应的直达距离矩阵转换成直达时间矩阵,再把不同线路的直达时间矩阵按照取小运算合成一个总的直达时间矩阵。然后按照下列修改了的最短路算法计算任意两点之间的最短通行时间。

第 1步　给定直接到达时间矩阵 $T^0 = (t_{ij}^0)_{n \times n}$;

第 2步　构造最多经过一次换乘即可到达的最短时间矩阵 $T^{(1)}$, $t_{ij}^{(1)} = \min\{ t_{ij}^0, t_{is}^0 + t_{sj}^0 + t_0 \}$,其中 t_0 表示换乘时间。

第 3步　对于任意 $k \geq 2$, 构造最多经过 $k-1$次换乘即可到达的最短时间矩阵 $T^{(k)}$。其中 $t_{ij}^{(k)} = \min \{ t_{ij}^{(k-1)}, t_{ij}^{(k-1)} + t_{sj}^0 + t_0 \}$

直到 $T^{(k)} = T^{(k-1)}$,即得到任意两个站点之间的最短通行时间矩阵。其中 t_0 为换乘一次所用的时间。

本例中,假设任意两个相邻公交车站之间的平均行驶时间均为 3分钟,公交车换乘耗时(包括等车时间)为 5分钟。则按照上述方法可以得到两条公交线路的直达时间矩阵分别为 T_1, T_2。

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 3 & 6 & 9 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 3 & \infty & 0 & 3 & 6 & \infty \\ 6 & \infty & 3 & 0 & 3 & \infty \\ 9 & \infty & 6 & 3 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & \infty & 6 & 9 \\ \infty & 3 & 0 & \infty & 3 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 6 & 3 & \infty & 0 & 3 \\ \infty & 9 & 6 & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

再将直达时间矩阵利用取小运算合成,即可得到总的直达时间矩阵

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 3(1) & 6(1) & 9(1) & \infty \\ \infty & 0 & 3(2) & \infty & 6(2) & 9(2) \\ 3(1) & 3(2) & 0 & 3(1) & 3(2) & 6(2) \\ 6(1) & \infty & 3(1) & 0 & 3(1) & \infty \\ 9(1) & 6(2) & 3(2) & 3(1) & 0 & 3(2) \\ \infty & 9(2) & 6(2) & \infty & 3(2) & 0 \end{pmatrix}$$

对该直达时间矩阵利用修改的 Dijkstra算法即可求出任意两点之间的总出行时间最短的乘车方案。本例中任意两站之间的最少出行时间矩阵为

$$TT = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 3 & 6 & 9 & 14 \\ 11 & 0 & 3 & 11 & 6 & 9 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 6 & 11 & 3 & 0 & 3 & 11 \\ 9 & 6 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 14 & 9 & 6 & 11 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $tt_{15}=9$表示乘坐公交车从 a到 e的最短时间为 9分钟,乘车方案为直接乘 1号线路的公交车,不需换乘。

在实际中,由于等车耗时比较多,所以,当两个换乘点之间只有一站路并且该站路距离又不是很远时,许多乘客会选择步行到达下一个换乘点,以减少出行时间并节约出行费用。因此,在选择出行路线时,应该考虑乘客在某些站点之间步行的情况,这时我们只需要把乘客步行对应的最短时间矩阵列出来,与各条公交线路对应的最短时间矩阵一起合成,构造总的最短时间直达矩阵,再按照修改的 Dijkstra算法即可求出最短时间出行方案。在使用这种方法时,当选择在两站之间步行时,可以减少一次换乘机会,因此,应该将步行对应的最短距离矩阵里的每个非零有限元素减去一次换乘时间,以便直接使用修改了的最短路算法。

1.5 满意度最大的线路选择模型

以上我们介绍了单纯考虑一种因素(如换乘次数、距离、时间、费用等)时最优线路的选择模型及算法。由于在人们实际选择公交出行线路的时候,往往不止考虑一种因素,比如,人们通常会综合考虑换乘次数、距离、时间、费用等多种因素来选择一个满意度最大的乘车方案。这时可以根据乘客的偏好确定一个合理的权系数向量 (w_c, w_d, w_t, w_e),然后,将各条线路对应的直达换乘矩阵、直达距离矩阵、直达时间矩阵、直达费用矩阵等先进行标准化处理,再进行加权平均,得到直达综合费用矩阵 W,其中 $w_{ij}=w_c \times c_{ij}+w_d \times d_{ij}+w_t \times t_{ij}+w_e \times q_{ij}$。再对各条线路的直达综合费用矩阵进行取小运算构造一个总的直达费用矩阵,同时考虑换乘费用,对该直达综合费用矩阵利用修改的 Dijkstra算法可以求出综合费用最小(即满意度最大)的乘车线路。

2 小结

本文提出了求解乘坐公共交通工具出行过程中的最优线路选择问题的数学模型及算法。本文给出的模型及算法具有很好的可扩展性,能够根据不同乘客的需求求出换乘次数最少、出行路线最短、出行时间最短、费用最低等的最优线路,而且当乘客需要综合考虑各种因素时可以通过设置合理的权系数得到一个直达综合费用矩阵,再使用修改的最短路算法即可求出满足不同需求的最优出行路线。本文的算法主要是 Dijkstra算法,复杂度为 $O(n^2)$,适合进行大规模的公交网络计算。本文的结果为建立快速方便的公交查询系统提供了强有力的技术支持。

参考文献:

[1] 许军林,蒋年德. 一种改进的公交换乘算法的实现[J]. 电脑知识与技术, 2007, 14 (2): 517-518.
[2] 陈箫枫,蔡秀云,唐德强,最短路径算法分析及在公交查询的应用[J]. 工程图学学报, 2001, 22 (3): 20-24.
[3] 徐多勇,李志蜀,梅林,基于 GSM短消息的公交查询系统的最优转乘方案研究与设计[J]. 计算机应用, 2007, 27 (B06): 397-399.