中国科学院数学与系统科学研究院
2007 年博士研究生招生试题
(3 小时完成，满分 100 分)
考试科目：运筹学基础

一. 考虑以下线性规划问题 (共三子题)

$$\begin{array}{lrrrrrl} \min & z = 9x_1 & +4x_2 & +10x_3 & & +11x_5 & \\ \text{subject to} & x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & +2x_5 & \geq 8 \\ & 5x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & +x_5 & \geq 18 \\ & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & +2x_5 & \geq 8 \end{array} \tag{1}$$

$$x_j \geq 0, \quad \text{for } j = 1, \cdots, 5 \tag{2}$$

设 x_6, x_7, x_8 为对应于三个不等式的松弛变量。 (x_1, x_2, x_4) 是一个最优基本解， B 是对应的基矩阵,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

（ 1 ）求出问题的最优解和最优植，并求出问题的对偶最优解。写出计算过程。

（ 2 ）若在问题中加入一个新的变量 x_9 ，相应的矩阵列系数为 $(2, 2, 1)$ ，目标中的系数为 1 ，此时最优解是否不变？为什么？若你的答案为否，试由目前的最优解出发找到新的最优解。（只作一次迭代，看所得的解是否为最优）

（ 3 ）回到原问题， x_1 的目标函数中的系数在什么范围内变化时最优解不变？

二. 给定一个整数规划 $\max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$ 是整数 $\}$, 其中 $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 的分量都是正整数。若去掉对变量 $\mathbf{x}$ 的整数约束条件，则得到一个线形规划。现记这个整数规划和由此形成的线形规划的一个最优解分别是 $\mathbf{x_0}$ 和 $\mathbf{x_1}$ 。请证明： $\lfloor \mathbf{x_1} \rfloor$ 是整数规划的可行解，且有 $\mathbf{c}^T\lfloor \mathbf{x_1} \rfloor \geq \mathbf{c}^T\mathbf{x_0} - \sum c_i$ 。

三. 一个无向连通图 G(V, E) 的中心是指使得 $\max\{d(u,v) | v \in V\}$ 尽可能小的顶点 u 这里 $d(u,v)$ 为从 u 到 v 最短路的距离。证明：一棵树或者恰好有一个中心，或者有两个相邻的中心。

四。若 $\bar{X}$ 是问题

$$\max z = CX; AX \leq b; X \geq 0$$

的可行解， $\bar{Y}$ 是其对偶问题的可行解。则有

$$C\bar{X} \leq \bar{Y}b$$

五。设线性规划问题 1 是

$$\max z_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \cdots, m; \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}$$

$(y_1^*, \cdots, y_m^*)$ 是其对偶问题的最优解。又设线性规划问题 2 是

$$\max z_2 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i + k_i, & i = 1, 2, \cdots, m; \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}$$

其中 k_i 是给定的常数，求证

$$\max z_2 \leq \max z_1 + \sum_{i=1}^{m} k_i y_i^*.$$