中国科学院数学与系统科学研究院

2004年博士研究生入学考试试题

（3小时完成，满分100分）

考试科目： 运筹学基础

一、[16分] 请证明：若 X 是问题：$\max z = CX$；$AX \le b$，$X \ge 0$，的可行解，Y 是其对偶问题的可行解，则有 $C\overline{X} \le \overline{Y}b$。

二、[16分] 线性规划问题(1)是

$$\max z_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \quad s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, & i = 1,2,\cdots,m \\ x_j \ge 0, & j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

设 $(y_1^*, \cdots, y_m^*)$ 是其对偶问题的最优解。又设线性规划问题(2)是

$$\max z_2 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \quad s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + k_i, & i = 1,2,\cdots,m \\ x_j \ge 0, & j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

其中 k_i 是给定的常数，请证明：$\max z_2 \le \max z_1 + \sum_{i=1}^{m} k_i y_i^*$

三、[18分] (1) 请列出一个非线性规划模型，找出由下面二个曲面

$$x + y = 1,$$
$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 1.$$

所交出的椭圆上离原点最近之点.

(2) 或者借助于Kuhn-Tucker条件求出其解来，或者用直接消去法求其出解.

四、[18分] 设 A 为一个 $n \times n$ 正定对称矩阵.

(1) 请写出 R^n 中一组向量 $x^1, \ldots, x^n$，使它们关于 A 共轭的定义

(2) 请证明它们是线性无关的.

(3) 设 $p^1, \ldots, p^n$ 为 R^n 中一组线性无关的向量，请写出由 $p^1, \ldots, p^n$ 构造出的关于 A 的一组共轭向量 $d^1, \ldots, d^n$，且 $d^1 = p^1$ 的公式.

五、[16分] 给定一个整数规划 $\max\{c^T x \mid Ax \le b,\ x \ge 0 \text{ 是整数}\}$，其中 A，b 和 c 的分量都是正整数。若去掉对变量 x 的整数约束条件，则得到一个线形规划。现记这个整数规划和由此形成的线形规划的一个最优解分别是 x_0 和 x_1。请证明：$\lfloor x_1 \rfloor$ 是整数规划的可行解，且有 $c^T \lfloor x_1 \rfloor \ge c^T x_0 - \sum c_i$.

六、[16分] 请证明：任意一个有 n 个顶点的连通图，至少有 n-1 条边.