中国科学院数学与系统科学研究院
2003年博士研究生招生试题

（3 小时完成，满分 100 分）

考试科目：运筹学通论　　　　**导师姓名：**章祥荪

1. 在（图-1）中，给出了一个含有10个城市$v_1, v_2, \cdots, v_{10}$的加权图，各弧上标出的权数表明两城市间直接通信线路的造价。

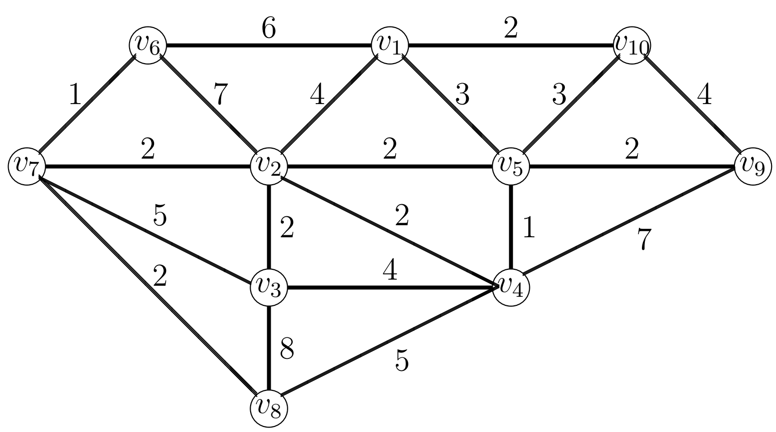
   (i). 试利用直观给出一个满足下列几个条件的最优通信网络设计方案:

   A. 各城市之间能够通信。

   B. 以下城市对之间直接通信：$(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_1)$。

   C. 使总造价最小。

   (ii). 试用运筹学模型（即利用运筹学的概念和术语、用文字或数学符号）来表述这一问题。（只要提出模型，不必考虑模型的复杂性及如何去解）



2. 设G 是一个有n 个顶点、m条边的连通平面图。称图中由边围起来的每一连通区域为图的一个面。记G 的面的个数为l，证明l, m, n的关系式为:

$$l = m - n + 2$$

(提示: 对l进行归纳证明)

3. 考虑下述带参数的线性规划问题$LP(\theta)$:

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \theta \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

此处$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{A}$ 为$n \times m$ 矩阵。$\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ 是一个参数，即每一θ的值对应一个线性规划。

定义$PL(\theta)$的可行集、顶点集、解集和基础解集如下：

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \theta \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\} \\ V(\theta) &= \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \text{ is a vertex of } F(\theta)\} \\ S(\theta) &= \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \text{ is a solution of } LP(\theta)\} \\ VS(\theta) &= S(\theta) \cap V(\theta) \end{aligned}$$

$F(\theta), V(\theta), S(\theta)$ 和$VS(\theta)$在θ 上的定义域如下:

$$D(M(\theta)) = \{\theta : \theta \in \mathbb{R},\ M(\theta) \neq \emptyset\}$$

其中$M(\theta)$分别取$F(\theta), V(\theta), S(\theta), VS(\theta)$, $\emptyset$为空集。

(i). 设$D(S(\theta)) \neq \emptyset$, 证明

$$D(F(\theta)) = D(V(\theta)) = D(S(\theta)) = D(VS(\theta)) = [\theta_1, \theta_2]$$

(ii). 证明$VS(\theta)$ 是一个上半连续的点到集的映射。（提示：一个点到集的映射是上半连续的，指若有$\theta^k \longrightarrow \theta^*, \boldsymbol{x}^k \in M(\theta^k)$且$\boldsymbol{x}^k \longrightarrow \boldsymbol{x}^*$，则有$\boldsymbol{x}^* \in M(\theta^*)$。）

（共三题）