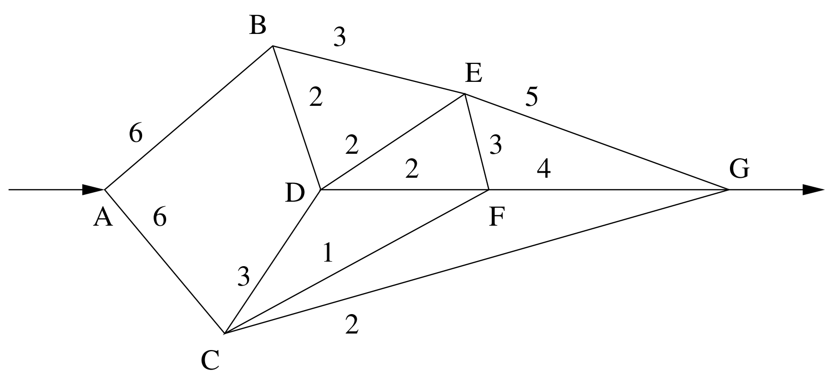
中国科学院数学与系统科学研究院
2002 年博士研究生招生试题

（3 小时完成，满分 100 分）

考试科目：运筹学通论　　　　**导师姓名：**章祥荪

1. 在（图 -1）中，给出了一个含有 7 个节点 A、B、C、D、E、F、G 的水网网络，各弧上标出的数字表明该段弧上水流能通过的最大容量。若水流以充分大的流量从 A 点流入，问：水流经各个弧段后，从 G 点流出的最大水流量是多少？给出答案及其计算过程。



（图 -1）

2. 某单位因业务需要，计划进行职工晋级扩编。各级人员的现有人数、月工资数如下表所示：

人员级别	月工资	现有人数
一	2600	20
二	1500	30
三	1000	70

扩编办法及要求如下：

(a) 晋升人员由本级向上一级晋升，即一级人员扩充由二级人员晋升，二级人员由三级晋升，三级人员晋升后的空缺由外聘补充。招聘数可大于空缺数。未晋升的人员中，一级职工每人每月增加 200 元，二级职工每人每月增加 100 元，三级职工每人每月增加 50 元。

(b) 扩编要求：尽量扩充二级人员，并要求在扩编后，一级人员的工资总额的 2 倍与二级人员的工资总额基本相同。

试问：扩编后，在一级人员工资总额的 2 倍与二级人员工资总额的偏差值最小的条件下，如何编制晋升与扩编计划，可使扩编后的总工资数最小？（**只要求写出数学模型，不求解！**）

3. 假设下述非线性规划问题（NP）中，$f(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，$g_i(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 均为二阶连续可微函数，$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ 是（NP）的 KT 对。

$$\begin{array}{ll} \min & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & g_i(\boldsymbol{x}) \geq 0, i \in I = \{1, 2, \cdots, m\}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

在 $\boldsymbol{x}^*$ 处，关于 $\boldsymbol{x}^*$ 与 $\boldsymbol{\lambda}^*(\geq 0)$ 的二阶充分性条件成立，即对所有满足 $\boldsymbol{S} \neq 0, \boldsymbol{S}^T \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) \geq 0, i \in I^*$ 的方向 $\boldsymbol{S}$，若 $\boldsymbol{S}^T \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0, i \in I_+^*$，则必有 $\boldsymbol{S}^T \boldsymbol{W}^* \boldsymbol{S} > 0$ 成立。其中

$$I^* = \{i | g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0, i \in I\}, \quad I_+^* = \{i | i \in I^*, \lambda_i^* > 0\},$$

$$\nabla g_i(\boldsymbol{x}) = (\frac{\partial g_i}{\partial x_1}, \frac{\partial g_i}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial g_i}{\partial x_n})^T,$$

$$\boldsymbol{W}^* = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \nabla_x^2 \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*) - \sum \lambda_i^* \nabla^2 g_i(\boldsymbol{x}^*),$$

$\nabla^2 f, \nabla^2 g_i$ 为 f 和 g_i 的 Hesse 阵。

试证明：$\boldsymbol{x}^*$ 是（NP）的一个严格局部最小点。

4. 设标准型线性规划问题（LP）

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，$\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 的行满秩矩阵，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ 均为常向量，其极点均非退化。

(a) 问：当用单纯形方法求得（LP）的最优解 $\boldsymbol{x}^*$ 时，非基变量对应的检验数是否就是（LP）的最优性条件中的最优乘子？试给出准确的回答并给以证明。

(b) 若用单纯形方法求得最优解 $\boldsymbol{x}^*$ 时，非基变量对应的检验数有零检验数，试证明：（LP）的最优解不唯一，且最优解集合的维数等于零检验数的个数。

（共四题）