中国科学院数学与系统科学研究院
2005 年博士研究生招生试题

（3 小时完成，满分 100 分）

考试科目：非线性规划　　　　**导师姓名：**章祥荪

1. 设 $\boldsymbol{S}$ 是 n 维空间 R^n 中的一个非空、有界的凸集，$f(\boldsymbol{y})$ 是定义在 $\boldsymbol{S}$ 上的一个 $R^n \longrightarrow R$ 的函数：

$$f(\boldsymbol{y}) \;=\; \sup\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}:\; \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}\}$$

$f(\boldsymbol{y})$ 称为 $\boldsymbol{S}$ 的支撑函数。

（1）证明 $f(\boldsymbol{y})$ 是 $\boldsymbol{S}$ 上的一个凸函数。

（2）是否有 $\boldsymbol{S}$ 存在，使 $f(\boldsymbol{y})$ 为一严格凸函数?

2. 考虑问题

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \;\le\; \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题的一个可行解，满足 $\boldsymbol{A}_1\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{A}_2\bar{\boldsymbol{x}} < \boldsymbol{b}_2$，此处 $\boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{A}_1^T, \boldsymbol{A}_2^T)$。假定 $\boldsymbol{A}_1$ 为满秩。

（1）写出将任意向量投影到 $\boldsymbol{A}_1$ 的零空间的投影矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的具体公式。

（2）设 $\bar{\boldsymbol{d}} = -\boldsymbol{P}\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})$。证明若 $\bar{\boldsymbol{d}} \neq 0$，则是 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处的一个下降可行方向。

（3）若 $\bar{\boldsymbol{d}} = 0$ 且 $\boldsymbol{u} = -(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_1^T)^{-1}\boldsymbol{A}_1 \ge \boldsymbol{0}$，证明 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是一个 KKT 点。

（4）证明以上产生的 $\bar{\boldsymbol{d}} = \lambda\hat{\boldsymbol{d}},$，此处 $\lambda > 0$，$\hat{\boldsymbol{d}}$ 是下面问题的一个最优解：

$$\begin{aligned}\text{Minimize}\quad & \nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{d}\\ \text{subject to}\quad & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{d} \;=\; 0\\ & \|\boldsymbol{d}\|^2 \;\le\; 1\end{aligned}$$

（5）若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$，将以上问题作出简化。

3. 对有约束问题 $\min\{f(\boldsymbol{x}) : g_i(\boldsymbol{x}) \le 0, i = 1, \cdots, m\}$，可以由以下四个带罚函数的无约束问题来解：

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) \;&+\; \mu\sum_{i=1}^{m}\max\{0, g_i(\boldsymbol{x})\}\\ f(\boldsymbol{x}) \;&+\; \mu\sum_{i=1}^{m}[\max\{0, g_i(\boldsymbol{x})\}]^2\\ f(\boldsymbol{x}) \;&+\; \mu\max\{0, g_1(\boldsymbol{x}), \cdots, g_m(\boldsymbol{x})\}\\ f(\boldsymbol{x}) \;&+\; \mu[\max\{0, g_1(\boldsymbol{x}), \cdots, g_m(\boldsymbol{x})\}]^2\end{aligned}$$

比较这四种形式，分析它们各自的优缺点。

（共三题）