中国科学院数学与系统科学研究院
2003年博士研究生招生试题

（3 小时完成，满分 100 分）

考试科目：非线性规划　　　　　**导师姓名：**章祥荪

1. 设S_1和S_2 为两个非空集合，$S_1 = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_1\}, S_2 = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_2\}$。记$S = S_1 \cup S_2$ 并设

$$\begin{gathered}\bar{S} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}, \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y} \le \lambda_1\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{z} \le \lambda_2\boldsymbol{b}_2, \\ \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}\end{gathered}$$

   (a). 记$H(S)$为包含S的最小凸集。若S_1, S_2为有界集，证明

$$H(S) = \bar{S}$$

   (b). 更一般地，可证明 $cl\{H(S)\} = \bar{S}$。

2. 二分搜索是一种非常基本的算法。设B为一给定大于1的整数，若我们要在区间$[0, B]$中寻找一个未知整数x，取$a = B/2$，问“x是否大于a？”回答无非是“是”或“不”，总是使搜索的区间缩短一半。以后逐次对剩下的区间取位于中间的数，提同样格式的问题。

   (a). 证明可在$\lceil \log_2 B \rceil$ 步后使搜索的区间最多只包含一个整数。此处符号$\lceil x \rceil$ 表示大于等于x的最小整数。

   (b). 在以上算法中取$a = \dfrac{B}{T}$或$a = \dfrac{(T-1)B}{T}$（T为大于等于的整数），称为广义二分搜索。证明一个在区间$[0, B]$中的未知整数可由广义算法在不多于

$$\lceil \log_{T/(T-1)} B \rceil$$

次运算后找到。

3. 一赌马者共有资金T。现有n匹赛马，设押对第i匹马所得奖金为投注的r_i倍，$r_1 > r_2 > \cdots > r_n > 0$. 设赌马者以比例$x_i$($\sum_i x_i = 1$)，投注到第匹马上。显然，当且仅当

$$r_i x_i \ \geq \ \sum_{j \neq i} x_j, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{1}$$

(a). 证明当$\sum_i 1/(r_i+1) \leq 1$时条件（1）能成立，即能找到x_i满足（1）式。（提示：取$x_i = c/(r_i+1)$）

(b). 若(1)成立且假定每匹马赢的可能性是相等的，则赌马者的平均收益为：

$$T \sum_i r_i x_i / n \tag{2}$$

试写出在不会输钱的前提下有最大平均收益(2)的求解最佳投注方案x_i的规划模型。

(c). 验证以下最优解：

$$x_1 = 1 - \sum_{j>2} \frac{1}{r_i+1}, \ x_i = \frac{1}{r_i+1}, \quad i = 2, \cdots, n, \tag{3}$$

满足由（ii）所确定的规划问题的K-T条件。

（d). 简要说明为什么只要满足K-T条件就是最优解了。

（共三题）