中国科学院数学与系统科学研究院
2002年博士研究生招生试题

（3 小时完成，满分 100 分）

考试科目：数学规划 **导师姓名：**章祥荪

1. 设 $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c$ 是二次凸函数，n 阶距阵 $\boldsymbol{G}$ 对称且正定。$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$。$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$ 是常向量，c 是常数。向量组 $\{\boldsymbol{y}^i, 1 \le i \le n\}$ 对 $\boldsymbol{G}$ 互相共轭，即

$$(\boldsymbol{y}^i)^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}^j = 0, i \neq j, 1 \le i, j \le n.$$

证明：从任取的初始点 $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ 出发，顺次沿方向 $\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \cdots, \boldsymbol{y}^n$ 作为迭代方向并以线性最优步长作为搜索步长求得下一个迭代点，则经 n 步可求得 $f(\boldsymbol{x})$ 的唯一极小值点.

2. 设 $f_i(x_i), 1 \le i \le n$ 是一元可微函数，$\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ 是问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{aligned}$$

的解。证明：存在实数 μ^*，使得

$$\begin{aligned} & f_i'(x_i^*) = \mu^*, && \text{当} x_i^* > 0 \text{时}, \\ & f_j'(x_j^*) \ge \mu^*, && \text{当} x_j^* = 0 \text{时} \end{aligned}$$

成立。

3. 证明：$f(\boldsymbol{x}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$ 是下半连续的，当且仅当 $\forall\alpha\in\mathbb{R}$，水平集 $S_\alpha(f)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n|f(\boldsymbol{x})\le\alpha\}$ 是闭集。（提示：下半连续的定义为：设 $\boldsymbol{x}^k\longrightarrow\boldsymbol{x}$, 对任给 $\varepsilon>0$, 存在 k_ε. 对任意 $k\ge k_\varepsilon$, 有 $f(\boldsymbol{x}^k)\ge f(\boldsymbol{x})-\varepsilon$.）

4. 设非线性规划问题（NP）为：

$$\begin{aligned} \min\quad & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x}\le b_i, 1\le i\le m \\ & \boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{x}=b_j, m+1\le j\le m+p \end{aligned}$$

其中，$f(\boldsymbol{x}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$ 为连续可微函数，$\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j$ 为 n 维列向量，b_i,b_j 为常量。令 $J(\boldsymbol{x})=\{j|\boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{x}=b_j,1\le j\le m+p\}$ 并假定 $(\boldsymbol{a}_j,j\in J(\boldsymbol{x}))$ 线性无关。

若定义矩阵

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_j,1\le j\le m+p), \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) &= \mathrm{diag}(\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{x}-b_1,\boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{x}-b_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m^T\boldsymbol{x}-b_m,0,\cdots,0), \end{aligned}$$

（$m+p$ 阶对角阵）

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) &= (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}))^{-1}\boldsymbol{A}^T, \\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}), \quad \text{（}\boldsymbol{I}\text{ 为 } n \text{ 阶单位阵）} \\ \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \quad \text{（}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\nabla f(\boldsymbol{x})\text{）} \end{aligned}$$

(1). 由线性无关假定，证明 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 为对称正定阵

(2). 令对任一迭代点 $\boldsymbol{x}^k$，定义迭代方向 $\boldsymbol{d}^k=-\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}^k)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^k)+\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{x}^k)\boldsymbol{u}^k$，其中 $\boldsymbol{u}^k$ 为 $m+p$ 维待定向量。试给出向量 $\boldsymbol{u}^k=(u_j^k,1\le j\le m+p)$ 的各元素 u_j^k 的值，并证明 $\boldsymbol{d}^k$ 为 $\boldsymbol{x}^k$ 处的可行方向，且当 $\boldsymbol{x}^k$ 为（NP）的非 KT 点时，$\boldsymbol{d}^k$ 为 $\boldsymbol{x}^k$ 处的下降方向。(提示：注意利用乘子性质定义u^k，计算中利用关系：$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}+\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}^Y\boldsymbol{A}$.)

（共四题）